

## 콜모고로프 흐름과 단일모드성 추측

김선철 (중앙대학교 수학과 교수)

### 1. 들어가는 글

필자는 수십 년간 물, 공기 등 유체의 흐름을 수학적으로 연구하는 것에 지속적인 관심과 흥미를 가져왔다. 흔히 물질을 기체, 유체, 고체의 세 상태로 분류하는데(물론 플라스마 등의 또 다른 상태도 있기는 하지만) 기체와 유체는 다 유체이고 심지어 고체도 아주 느리게 움직이는 유체로 볼 수 있기에, 유체의 흐름은 결국 세상 모든 물질의 운동을 다루는 것으로 볼 수도 있다.

이런 유체의 흐름을 수학적으로 다루는 데 있어서 그 주제들은 아주 다양하고 방대하다. 특별히 새천년 수학 문제와 관련하여 유체 흐름이 시간에 따라서 어떻게 변화하고, 어떤 특이점이 발생하는지 등에 많은 관심이 쏠려 있다. 하지만 시간이 한없이 흘러서 일종의 안정적인 상태가 되었을 때의 유체의 흐름은 어떤 것일지에 관해서도 상당한 관심이 있었다. 그중에서도 유체의 흐름이 빨라질 때 [혹은 유체의 점성(viscosity)이 한없이 작아질 때]의 흐름 상태의 변화는 난제 중의 하나이다. 이것은 고전물리학의 가장 유명한 미해결 문제인 난류(turbulence)와도 직접적인 관련이 있다.

필자는 이 주제에 관심을 두고 일본의 오카모토 히사시(Okamoto Hisashi) 교수(가쿠슈인 대학 재직, 현재 JSIAM 회장)와 함께 20여 년간 연구를 해오고 있는데, 필자의 접근방법은 구체적이고 기본적인 실례를 택하여 해석적 혹은 수치적 방법으로 접근하는 것이다.

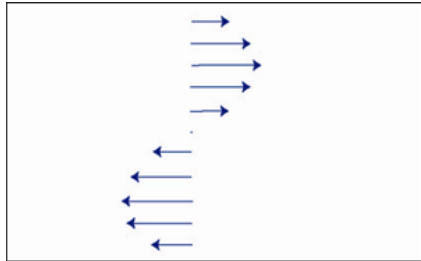
### 2. 콜모고로프 흐름

그중 대표적인 것이 콜모고로프 흐름(Kolmogorov flow)으로 이 유체 흐름은 기본적으로 간단한 삼각함수로 표시되며, 레이놀즈 수(Reynolds number)가 커짐에 따라 매우 복잡하고 흥미로운 분기 현상(bifurcation)을 보여준다(여기서 레이놀즈 수는 유체 흐름을 결정하는 양의 실수로서, 가장 간단하게는 유체의 속도라 생각하면 된다. 레이놀즈 수가 크다는 것은 속도가 큰 것을 의미한다).

먼저 안드레이 콜모고로프(Andrei Kolmogorov)는 20세기의 가장 위대한 수학자 중의 한 명으로 꼽히며 확률론과 동역학계, 위상수학 등을 포함한 수학의 광범위한 분야에 걸쳐 많은 업적을 남겼다. 흥미롭게도 그는 유체 흐름에 대해서도 방대한 실험데이터를 추론하여(그의 연구실에는 관련된 온갖

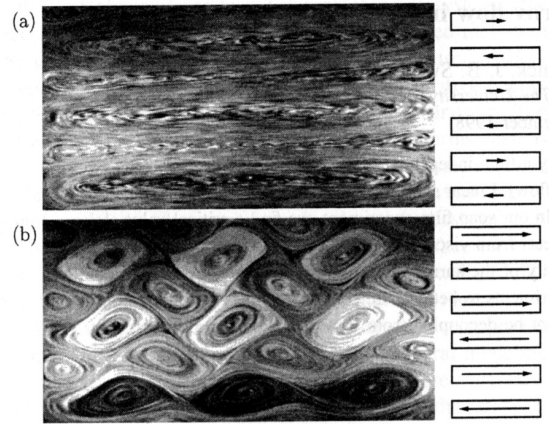
실험데이터가 쌓여 있었다고 한다!) 난류에 관한 수학적 이론의 틀을 세웠다. 그는 1959년에 모스크바 대학 학생들과의 세미나에서 아래의 유체 흐름을 제시하고 수학적으로 그 안정성을 연구하는 문제를 냈는데, 이것이 이 유체 흐름에 그의 이름이 붙게 된 계기이다.

좀 더 구체적으로 알아보자. 우선 영역을 2차원의 직사각형  $-\frac{\pi}{\alpha} \leq x \leq \frac{\pi}{\alpha}, -\pi \leq y \leq \pi$ 로 잡는데, 여기서  $\alpha > 0$ 는 영역의 가로세로의 비에 해당한다. 유체의 흐름을 표시하는 흐름함수(stream function)  $\psi = \psi(x, y)$ 에  $x, y$ 에 대해서 주기경계 조건을 부여하자. 내비어-스톡스 방정식에 컬(curl)을 취하고 그것을  $\psi$ 로 나타내면  $\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \psi_x \Delta \psi_y + \psi_y \Delta \psi_x = \frac{1}{R}(\Delta^2 \psi + f)$ 가 되는데 여기에서  $R > 0$ 는 레이놀즈 수,  $f$ 는 외부의 힘에 해당한다. 만약  $f = \cos y$ 라 가정하면 놀랍게도  $\psi = -\cos y$  즉 속도  $\mathbf{u} = (\psi_y, -\psi_x) = (\sin y, 0)$ 인 흐름이 모든  $R > 0$ 에 대해 하나의 해가 됨을 확인할 수 있다. 이 유체 흐름을 나타내보면 아래 <그림 1>처럼 단순히 좌우로 평행으로 움직이는



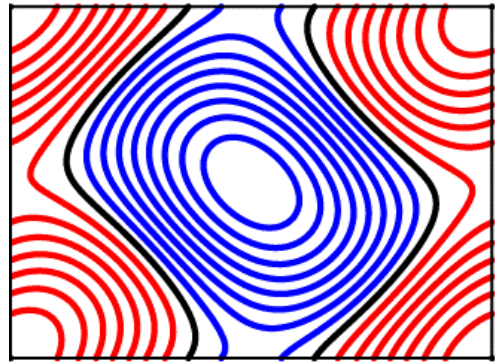
<그림 1> 기본 평행 흐름

유체 흐름을 나타낸다(따라서  $\psi$  = 상수로 주어지는 유체의 흐름선들은 그저 평행선들일 뿐이다). 그런데 이 평행의 흐름이  $R$ 을 증가시키면 분기 현상을 일으키며 각각각색의 새로운 해들을 생성해낸다. 아래 <그림 2>는 이와 같이 분기가 일어나는 상황을 비누막(soap film)을 사용하여 실제로 실험한 결과이다.



<그림 2> 실제 비누막 실험의 결과

여기서 <그림 2>의 (a)처럼 수평 방향의 흐름에서 속도를 증가시키면(즉  $R$ 이 커지면) 아래 (b)처럼 유체가 독특한 패턴으로 분기된다. 같은 상황을 위의 편미분방정식을 택해 수치계산으로 풀어본 결과는 아래 <그림 3>과 같다.



<그림 3> 위의 경우를 수치계산한 결과  
 $\alpha = 0.7, R = 6$

여기서 우리는 유체역학이 응용수학의 중요한 패러다임으로 여겨져 온 이유를 알게 된다. 그것은 실제 실험실에서 얻어지는 결과와 수학적 이론연구의 결과가 놀랍도록 일치한다는 것이다. 물론 예외적인 경우들도 있으나 상당히 많은 경우 이처럼 수학의 결과가 실제 물리현상과 잘 맞아떨어지기 때문에 오랫동안 유체역학은 수학의 응용에 있어서 많은 관심과 연구의 대상이 되어왔고, 하나의 모범적 모델로 여겨져 왔다.

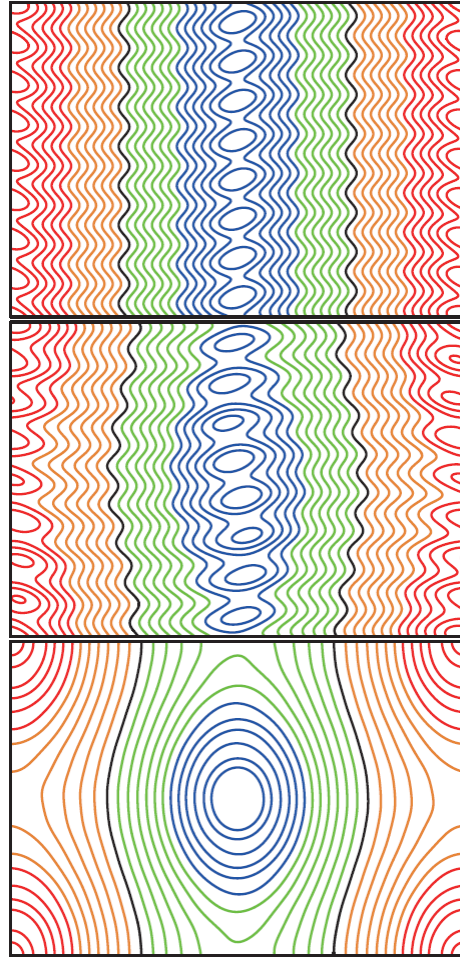
### 3. 단일모드성(unimodality)

이제 위의 방정식에서 외부의 힘  $f$ 를 다양하게 택하고 변의 비율  $\alpha > 0$ 을 변화시키면서 해를 계산해보면 여러 분기 현상이 나타남을 알 수 있다. 그리고 이로부터 생성되는 해들을 조사해 보면 그 모양이 아주 다양하고 제각각의 특징을 띠고 있음을 발견하게 된다.

언뜻 보기에 이 분기 현상은 그저 다양한 여러 가지 해를 만들어내는 것처럼 보이나 얼마 전에 필자는 이 현상들에 있어서 일종의 보편성(universality), 즉 공통의 특징을 발견하였는데 이를 좀 더 설명하겠다. 유체의 흐름이 분기 현상에 의해 여러 가지 다양한 형태의 새로운 흐름이 생성되지만, 놀랍게도 그중에 하나는 **단일모드성(unimodality)**이라는 특별한(위상적) 단순성을 나타낸다는 것이다. 이를 좀 더 쉽게 설명하자면, 유체 흐름 안의 여러 개의 작은 소용돌이가 붕괴하고 합쳐져서 결국 서로 반대 방향으로 도는 큰 소용돌이 두 개로 귀착됨을 확인하였다.

오른쪽 <그림 4>에 그 하나의 예를 제시한다. 여기에서 맨 위는 처음 분기의 해이고 두 번째와 세 번째는 두 번째 분기를 따라 생성되는 해이다. 자세히 보면  $R > 0$ 이 증가함에 따라 작은 소용돌이들끼리 합쳐져서 점점 더 크고 개수는 줄어드는 소용돌이가 되어감을 알 수 있다. 그리고 최종적으로는 서로 반대 방향으로 도는 두 개의 아주 큰 소용돌이만 남게 되는 것이다(여기 그림에서 붉은색은 반시계 방향의 소용돌이이고 푸른색은 시계 방향의 소용돌이이다. 네 개의 모서리는 주기성 때문에 한 개의 소용돌이임을 주의하라).

우리는 외부의 힘  $f$ 와 유체의 영역이 다양하게 주어질 때도 이러한 성질이 항상 성립하는 것을 확인하였다. 이 결과는 2차원 내비어-스톡스 유체의 궁극적 상태 중에 위상적으로 단순한(topologically simple) 것이 항상 존재함을 보여주는 것이다. 이로부터 필자는 이 단순한 상태가  $R$ 이 무한대일 때의 모든 내비어-스톡스 유체 흐름의

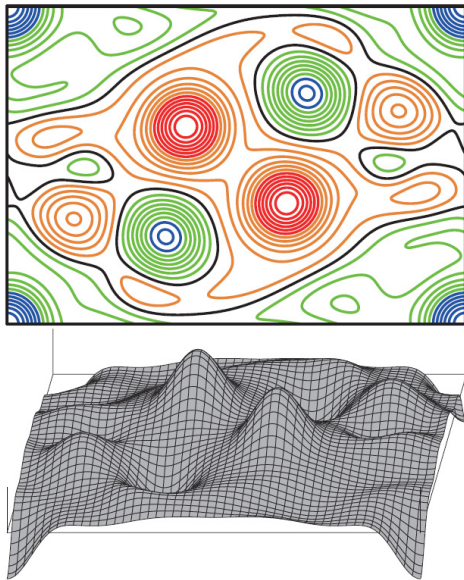


<그림 4>  $\alpha = 0.7, f = \cos 8y$ 일 때  
위로부터 각각  
 $R = 10,000, 10,000, 70,000$

최종적인 상태 중 하나라고 생각하여, 이를 **단일모드성 추측(unimodality conjecture)**이라 명명하였다.

이것은 2차원 난류이론과도 일맥상통하는 것으로서 단순히 생각하면 일반적인 물리현상과 상반되는 결과일 수도 있다. 이를테면 일반적으로 3차원에서는 이와는 반대로 유체 속도가 빨라질수록 유체 흐름은 더욱 복잡해지며 소위 ‘에너지 폭포’(energy cascade)의 과정으로 점점 더 작은 소용돌이가 생겨나고, 거기에 에너지가 전이되어 결국에는 아주 작은 스케일에서 마찰 등에 의해 열 등으로 바뀐다[2차원에서는 상황이 달라지는데 이런 이유로 2차원 유체 흐름의 에너지 흐름을 ‘역

폭포'(inverse cascade)라 부른다]. 하지만 앞서 제시한 콜모고로프 흐름의 경우에는 그와 반대로 오히려 유체 흐름은 더 단순화된다. 물론 여기서 주의할 것이 있다. 우리는 분기되어 나타나는 새로운 유체의 흐름이 모두 이렇게 간단하다고 주장하는 것은 아니다. 이를테면 아래 <그림 5>가 보여 주듯이  $R$ 이 커감에 따라 얼마든지 복잡한 흐름이 나타날 수 있다(사실 그러한 경우가 더 많다)!



<그림 5> 흐름선이 복잡한 해의 예  
 $\alpha = 0.7, f = \cos 4y, R = 30,000$

<그림 5>의 상단은 유체의 흐름선을 그린 것이고 아래는 3차원 조감도이다. 복잡한 여러 크기의 소용돌이가 보이는데, 붉은색은 반시계 방향의 소용돌이로 8개가 있고 푸른색은 시계 방향의 소용돌이로 7개가 보인다.

그림에도 불구하고 우리가 주장하는 것은 그러한 여러 해 가운데 이처럼 위상적으로 단순한 해가 적어도 하나는 항상 존재한다는 것이다(더 나아가서 이 주장은 시간 주기적인 해의 경우까지 확장해서 생각해 볼 수 있고, 그 경우에도 마찬가지로 한 주기 내내 이처럼 위상적으로 단순한 해가 존재함을 수치계산으로 확인하였다). 이를 해석학적으로 또는 위상적으로 접근을 시도하였으나 아직 해결하

지 못하고 있다. 따라서 이 흥미로운 현상에 대해서 앞으로 추가적인 확인과 함께 수학적으로 엄밀한 증명과 해석이 요청되는 상황이다. 바라기는 이 글을 읽는 독자 중에 이에 대한 관심을 두고 연구를 하는 이가 나타났으면 한다.

#### 4. 맺는 글

끝으로 언급하고 싶은 것은 난류 관련 연구의 어려운 점이 여기에 다시 드러난다는 것이다. 난류를 연구하다 보면 무언가가 반드시 일어난다고 주장하기가 상당히 조심스럽다. 많은 다양한 경우 중에 그것에 위배되는 상황이 있을 수 있기 때문이다. 역사적으로 그런 사례가 여럿 있었다. 따라서 반드시 이렇게 될 것이라고 단정 짓기는 매우 위험스럽다. 다만 지금까지 우리가 연구하며 계산해 본 경우에는 위의 단일모드성 추측이 다 성립하였기에, 아주 엄격히 이야기하자면 대부분의 경우에 옳다는 것을 확인한 셈일 뿐이다. 결국 냉정히 보면 아직까지는 추측일 따름이다. 그러기에 이 글을 읽는 여러분의 많은 관심과 조언을 부탁하며 글을 마친다.

#### [참고문헌]

- 1) G. Boffetta and R. E. Ecke: Annual Rev. Fluid Mech. (2012) vol. 44, 427-451.
- 2) Burgess, J.; Bizon, C; McCormick, W.; Swift, J.; Swinney, H. Phys. Rev. E(1999) vol. 60, 715-721.
- 3) Chorin, A. J.: *Vorticity and Turbulence* (Springer, 1994)
- 4) Frisch, U.: *Turbulence* (Cambridge Univ. Press, 1995)
- 5) Kim, S.-C.; Okamoto, H. Nonlinearity (2015) vol 28, no. 9, 3219-3242.(open access)  
<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0951-7715/28/9/3219>
- 6) Meshalkin, L.D.; Sinai, Y. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, (1962) vol. 25, 1700-1705.
- 7) Obukhov A M: 1983 Russ. Math. Surv. (1983) vol. 38, 113-126.
- 8) 岡本 久, 日本物理学会誌 (2016), 第71巻 第8号, 526-532. 